SU(2,2)のCohomological Hardy Space(概均質ベクトル空間の展望)

松本, 久義

数理解析研究所講究録
555巻 1985年 9-31

SU(2,2) の Cohomological Hardy Space

東大理　松本 久義
(Hisayosi Matumoto)

G を connected real semisimple linear Lie group とし．$\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。また

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

をその graded な分解 (i.e. $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ となるもの) とする。すると $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}$ の maximal prabolic subalgebra で．それに対応する G の maximal prabolic subgroup を P としたとき．P の Levi 分解

$$P = LN$$

を L の Lie algebra が $\mathfrak{g}_0$, N の Lie algebra が $\mathfrak{g}_1$ となっているようにとっておく。すると L は $\mathfrak{g}_1$ に Adjoint action で作用するが．$(L, \mathfrak{g}_1)$ は real な Prehomogeneous vector space となる。ここで興味深いのは $(L, \mathfrak{g}_1)$ が相対不変式を持つ場合である。例としては．K を G の maximal compact subgroup としたとき．G/K が Hermitian symmetric space となり G/P がその Šilov boundary と

なるような場合はそうなる。ここで以前から、GのPに対応する退化系列表現の分解を$(L, \mathfrak{g}_1)$のorbit分解に対応して得るということがいくつかの例についてやられてきた。(例えば[K-V]，また[Gr]なども類似の状況における結果である。) ここで先に述べたG/KがHermite対称空間になる場合については$(L, \mathfrak{g}_1)$は必ずproperなconvex coneになるようなopen open orbitをもつ。このorbitに対応する退化系列表現の部分表現は、実はG/K上の正則関数からなる空間の表現として実現され、そのŠilov境界への境界値を取ることによって退化系列への埋め込みが定義できる。たとえば$SL(2,\mathbb{R})$においては、open orbitはこのようなものが2つで、それが丁度、上半平面、下半平面上の正則関数の空間(例えばHardy space)に実現される表現に対応している。しかしより複雑な群になると、それで退化系列のすべての既約成分が得られるわけではない。つまり$(L, \mathfrak{g}_1)$にproper convexでないようなopen orbitが現われて、それに対応する表現を考えなければならなくなる。
一方この話とは別の文脈から大島利雄先生は"Hermite対称空間"の外側に現われる一般のsemisimple symmetric space上のcohomologyを考えることを提唱していた。* (この場合はSteinでないからsectionを考えても意味がないのである。) そこで、$(L, \mathfrak{g}_1)$の各open orbitに対応する表現は"(一般の)semisimple symmetric space上のcohomologyの空間"に実現されるのではないか？と期待されるのであるが、ここでは$SU(2,2)$について得られた結果について述べてみたい。

* これはZuckermanが代数的に構成した表現とも関連している。[Vo], [Vo-Z], [R-S-W]などを参照のこと。

2.

§1. Some representation in degenerate series of $SU(2.2)$

1.1. ここでは4×4複素行列Yを、2×2複素行列A, B, C, Dをつかって

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

などと書く記法を用いる。

☆ $F_{\mathbb{C}}$をcomplex Grassmann manifoldで$\mathbb{C}^4$の2次元部分空間からなるものとする。また$e_0 \in F_{\mathbb{C}}$を2つのvector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られる$\mathbb{C}^4$の部分空間とする。すると、$G_{\mathbb{C}} = Sl(4, \mathbb{C})$は$F_{\mathbb{C}}$にtransitiveにactし、その$e_0$でのstabilizerは

$$P_{\mathbb{C}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right) \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

となる。よって$F_{\mathbb{C}}$はhomogeneous space $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$と同一視される。

次に$G_{\mathbb{C}}$のreal form Gを次のように定める。

$$G = SU(2.2) = \left\{ Y \in G_{\mathbb{C}} \;\middle|\; Y^* \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i \\ \hline i & 0 \end{array}\right) Y = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i \\ \hline i & 0 \end{array}\right) \right\}$$

(ただし$Y^* = {}^t\bar{Y}$, ¯は複素共役)

よって4×4複素行列 $g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ がGに含まれるための必要十分条件は、 $AB^* = BA^*$, $AD^* - BC^* = I$, $CD^* = DC^*$ となる。

☆ 次に$F_{\mathbb{C}}$のG-orbit structureを考察しよう。(例えば[W]を見よ)

p, qを $0 \leq p+q \leq 2$ なる正の整数としたとき、

$$O^{(p,q)} = \left\{ x \in F_{\mathbb{C}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i \\ \hline i & 0 \end{array}\right) \text{に対応する Hermitian form の } x \text{ への制限の} \\ \text{符号が } (p,q) \end{array} \right\}$$

とおくと.
$$F_{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{\substack{p,q \\ 0 \le p+q \le 2 \\ 0 \le p,\ 0 \le q}} O^{(p,q)} \qquad (\text{disjoint union})$$

が. $F_{\mathbb{C}}$ の G-orbital decomposition を与える。このうち open orbit は $O^{(2,0)}$, $O^{(0,2)}$, $O^{(1,1)}$ の3つでこれらをそれぞれ Γ_0^+, Γ_0^-, $\tilde{D}$ と書く。すると $\Gamma_0^\pm$ は Hermitian symmetric space $(SU(2,2)/S(U(2)\times U(2)))$ の構造を持つ。次に $e_{1,1} \in F_{\mathbb{C}}$ を. 2つの vector

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で張られる $\mathbb{C}^4$ の2次元部分空間とすると. 明らかに $e_{1,1} \in \tilde{D}$ となる。ここで 2×2 matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を J と書くことにする。すると $e_{1,1}$ における G の stabilizer H は次のように書ける。

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} AJ & -CJ \\ \hline JC & JA \end{array}\right) \;\middle|\; AC^* = CA^*,\ AJA^* + CJC^* = I \right\}$$

ここで H は $S(U(1,1)\times U(1,1))$ と同型であり. $\tilde{D}$ は symmetric space $SU(2,2)/S(U(1,1)\times U(1,1))$ に同一視される。

次に $F_{\mathbb{C}}$ の G-closed orbit は $O^{(0,0)}$ の1つだけである。以下これを F と書く。ここで $e_0 \in F$ であり. G の e_0 における stabilizer は

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right) \in G \right\}$$

なる G の maximal prabolic subgroup で F は G/P と同一視される。

4.

☆ 次に $F_{\mathbb{C}}$ と F のある open cell を考察する。

$H(2) = \{2\times 2$ hermitian 行列$\}$ とする。また

$\overline{N} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in H(2)\right\} \subseteq G$

$\overline{N}_{\mathbb{C}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}}\right\}$ などとおく。すると $F_{\mathbb{C}}$ の $\overline{N}_{\mathbb{C}}$-orbit $\overline{N}_{\mathbb{C}}\cdot e_0$ は $F_{\mathbb{C}}$ の open dense set となり

(1)
$$\underset{\overline{N}_{\mathbb{C}}\cdot e_0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1+z_2 & z_3-iz_4 \\ 0 & 1 & z_3+iz_4 & z_1-z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot e_0} \longleftrightarrow \underset{M_2(\mathbb{C})}{\begin{pmatrix} z_1+z_2 & z_3-iz_4 \\ z_3+iz_4 & z_1-z_2 \end{pmatrix}} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{C}^4}{(z_1\cdots z_4)}$$

という対応を考えると、$\overline{N}_{\mathbb{C}}\cdot e_0$ は複素 2×2 行列全体や $\mathbb{C}^4$ と同一視される。また $\overline{N}\cdot e_0 \subseteq \overline{N}_{\mathbb{C}}\cdot e_0$ はこの対応によって $H(2)$ あるいは $\mathbb{R}^4$ と同一視される。また $\overline{N}\cdot e_0$ は F の open dense set となっている。

ここで以下 z_i を複素変数として、($i=1,\cdots,4$)

$$z_i = x_i + iy_i \quad (x_i, y_i \in \mathbb{R},\ i=1,\cdots,4)$$

という記法を用いることにする。ところで open orbit $\Gamma_0^{\pm}$ については実は、$\Gamma_0^{\pm} \subseteq \overline{N}_{\mathbb{C}}\cdot e_0 \simeq \mathbb{C}^4$ がいえて さらに

$\Gamma_0^{+} = \{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2>0,\ y_1>0\}$

$\Gamma_0^{-} = \{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2>0,\ y_1<0\}$

となる。これは Hermitian symmetric space の Tube domain としての実現に他ならない。また $\mathbb{R}^4 = H(2)$ は $\Gamma_0^{\pm}$ の Šilov boundary を与えている。

5.

一方．$D = \tilde{D} \cap \bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e_0$ とおくと．これは $\tilde{D}$ の open dense set で

$$D = \{(z_1 \cdots z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 < 0\}$$

となる。

1.2

☆ 以下［K-V］に従い $\check{S}$ilov boundary 上の関数空間に実現される G の表現を記述する。まず $L^2(H(2))$ を $H(2) = \mathbb{R}^4$ としたときの Euclidean measure についての L^2-space とする。$g^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ となるように $g \in G$ をとり．$X \in H(2)$ に対して

$$(T(g)f)(X) = (\det(CX+D))^{-2} f((AX+B)(CX+D)^{-1})$$

と定めると．$(AX+B)(CX+D)^{-1}$ は measure 0 を無視すれば well-defined で $(T, L^2(H(2)))$ は unitary 表現となる。

☆ 実はこの表現は次のような line bundle の section の空間に実現される G の退化系列に属する表現に他ならない。

まず $\gamma = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right) \in P_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\rho'(\gamma) = (\det D)^2$$

とおくと．ρ' は $P_{\mathbb{C}}$ の1次元正則表現となる。ここで $L_{\rho'}$ を ρ' に同伴する $F_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ の homogeneous holomorphic line bundle とする。そして $L_{\rho'}$ の F への制限も $L_{\rho'}$ とかく。よって $L_{\rho'}$ 上の hyperfunction global section のなす空間は次の集合と同一視される。

$B(F, L_{\rho'}) =$

$\{f \in B(G) \mid f(gp) = \rho'(p)^{-1} f(g) \quad \text{for all } g \in G,\ p \in P\}$

(ここで $B(G)$ は G 上の hyperfunction 全体の集合)

この $L_{\rho'}$ に対応する G の退化系列表現には自然に unitary structure が入り、その open cell $\bar{N}\cdot e_0$ への制限は実は $(T, L^2(H(2)))$ になっている。(c.f. [J-V] P82)

☆ 次に $(T, L^2(H(2)))$ の"Fourier 変換"を考えよう。

まず $H(2)$ の dual space/$\mathbb{R}$ $H(2)^*$ を $H(2)$ 上の 2次形式 $\mathrm{Tr}\,XY$ によって $H(2)$ と同一視しておく。

ここで

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} z_1+z_2 & z_3-iz_4 \\ z_3+iz_4 & z_1-z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1+v_2 & v_3-iv_4 \\ v_3+iv_4 & v_1-v_2 \end{pmatrix}$$

$$= 2(z_1v_1 + z_2v_2 + z_3v_3 + z_4v_4)$$

となっている。$f \in L^2(H(2))$, $\Xi \in H(2)^*$ に対して

$$(\mathcal{F}f)(\Xi) = \hat{f}(\Xi) = \int e^{-i\mathrm{Tr}X\Xi} f(X)\,dX$$

(dX は Euclidean measure)

なる Fourier 変換を考えよう。$\mathcal{F}^{-1} : L^2(H(2)^*) \longrightarrow L^2(H(2))$ をその逆 Fourier 変換とする。ここで $g \in G$, $f \in L^2(H(2)^*)$ に対して

$$\hat{T}(g)f = \mathcal{F}(T(g)(\mathcal{F}^{-1}f))$$

とおくと、当然 $(\hat{T}, L^2(H(2)^*))$ は $(T, L^2(H(2)))$ と同型な G の unitary 表現である。

☆ ここで G の maximal parabolic subgroup

$$\bar{P} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \in G \right\}$$

を考えよう。

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & (a^*)^{-1} \end{array}\right) \middle| \ a \in Gl(2,\mathbb{C}),\ \det a \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと、$\bar{P} = L\bar{N}$ とかける。（これは $\bar{P}$ の Levi 分解である。）

ここで $\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & (a^*)^{-1} \end{array}\right) \in L$, $\left(\begin{array}{c|c} 1 & X \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in \bar{N}$ に対して

$$\left(\hat{T}\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & (a^*)^{-1} \end{array}\right) f\right)(\Xi) = (\det a)^2 f(a\Xi a^*)$$

$$\left(\hat{T}\left(\begin{array}{c|c} 1 & X \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) f\right)(\Xi) = e^{i\operatorname{Tr} X\Xi} f(\Xi)$$

がわかるから、$H(2)^*$ の元で Hermitian form としての符号がそれぞれ $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ なるものの全体をそれぞれ V_+, V, V_- とかくと、

(2) $\quad L^2(H(2)^*) = L^2(V_+) \oplus L^2(V) \oplus L^2(V_-)$

は $\bar{P}$ の表現としての分解を与えていることがわかる。

<u>Lemma 1.2.1</u> 分解 (2) は $\bar{P}$ の表現として既約分解になっている。

証明は容易

さらに [K-V] ではより一般的な群 ($SU(n,n)$, $Sp(2n+1,\mathbb{R})$) に対して次を特別な場合として含むような結果が示されている。

<u>Theorem 1.2.2</u> 分解 (2) は G の表現としての既約分解になっている。

☆ この場合 $L^2(V_\pm)$ は Hermite 対称空間上の Hardy space に実現される表現だから $L^2(V)$ をこれから問題にすることにする。

§2. Factorization of an Inverse Fourier Transformation

2.1

☆ まず $H(2)^*$ に $\begin{pmatrix} v_1+v_2 & v_3-iv_4 \\ v_3+iv_4 & v_1-v_2 \end{pmatrix}$ $(v_1,\cdots,v_4\in\mathbb{R}^4)$ で

座標を入れ $\mathbb{R}^4$ と同一視する。すると

$$V=\{(v_1\cdots v_4)\in\mathbb{R}^4 \mid v_1^2-v_2^2-v_3^2-v_4^2<0\}$$

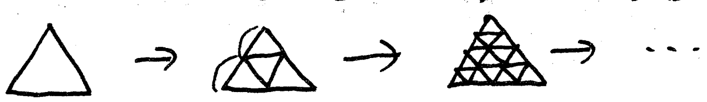
となる。ここで $f\in L^2(V)$ の逆Fourier変換を与えるのであるが、その前に f を proper (つまり全直線を含まない) な convex cone に support をもつような関数の和に分解してそれぞれの逆Fourier変換を考える… ということをする。具体的には、以下のようにしていく。

$$S^2=\{(v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^3 \mid v_2^2+v_3^2+v_4^2=1\}$$

に $\mathbb{R}^3$ から induce された metric を入れ測地線 (つまり原点を通る $\mathbb{R}^3$ の Hypersurface と S^2 のまじわりの一部) による3角形分割ですべての3角形が球面3角形として鋭角3角形 (但し直角は許す) で、さらに同じ性質を持つような細分をいくらでもとれ、各3角形の diameter をいくらでも小さくしていくことができるようなものを考える。

<u>Lemma 2.1.1</u> 次のようにして作った S^3 の3角形分割の系列は上の条件をみたす。

◉ S^2 に内接する正8面体を考え、その各面を



のように分割していき、その原点から S^2 への射影を考える。

証明は. 鋭角3角形ということだけが問題だが直接計算すれば示せる。

☆ さてそのような分割 Ⓗ で十分細かいものを1つ固定し. Δを. $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$を頂点とするその分割に現れる1つの3角形とする。

$$(\xi^{(i)} = (\xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}, \xi_4^{(i)}) \in \mathbb{R}^3, \ \sum_{j=2}^{4} (\xi_j^{(i)})^2 = 1)$$

また $\det\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\\ \xi^{(3)}\end{pmatrix} > 0$ となるように順番を並べておく。

このとき $\mathbb{R}^4$の凸包もproperなconeを次のように定める。

$$V_\Delta = \left\{ (v_1, \cdots, v_4) \in V \;\middle|\; \det\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\\ v'\end{pmatrix} \geqq 0 \text{ かつ } \det\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ v'\\ \xi^{(3)}\end{pmatrix} \geqq 0 \right.$$
$$\left. \text{かつ } \det\begin{pmatrix}v'\\ \xi^{(2)}\\ \xi^{(3)}\end{pmatrix} \geqq 0 \quad \text{ただし } v' = (v_2, v_3, v_4) \right\}$$

以下 Ⓗ の3角形の集合や頂点の集合もすべて Ⓗ で表すことにする。

Lemma 2.1.2 $\quad V = \bigcup_{\Delta \in Ⓗ} V_\Delta \quad$ (measure 0を無視して disjoint)

証明 $\quad V_\Delta = \{ (v_1 \cdots v_4) \in V \mid v'$の単位球面へのprojectionが Δのclosureに入っている$\}$

より明らか。⊣

よってV_Δの定義関数をχ_Δとして $f \in L^2(V)$に対して

$f_\Delta = f \cdot \chi_\Delta$ とおくと.

$$f = \sum_{\Delta \in Ⓗ} f_\Delta \quad (L^2\text{-function として})$$

2.2 まず次のLemmaを示す。

Lemma 2.2.1 V_Δは $S_\Delta = \bigcup_{\substack{i=1,2,3\\ \varepsilon=\pm1}} \{ (\varepsilon t, th\xi_2^{(i)}, th\xi_3^{(i)}, th\xi_4^{(i)}) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geqq 0, h \geqq 1 \}$

の凸包に含まれる。

証明 $(v_1, v_2, v_3, v_4)\in V_\Delta$ とする。もし $v_1 \neq 0$ ならば
(v_1, v_2, v_3, v_4) が $\bigcup_{i=1,2,3}\{(v_1, k|v_1|\xi_2^{(i)}, k|v_1|\xi_3^{(i)}, k|v_1|\xi_4^{(i)}) \mid k\geq 1\}$
の凸包に入ることは容易にわかる。$v_1=0$ ならば十分小さな δ に対して
$(\pm\delta, v_2, v_3, v_4)\in V_\Delta$ であることから明らか。⊣

ここで $\xi=(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ をある Ⓗ の頂点として

$$W'_\xi = \{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid |y_1| < \xi_2 y_2+\xi_3 y_3+\xi_4 y_4\}$$

($z_i = x_i+\sqrt{-1}y_i$, $x_i, y_i\in\mathbb{R}$ $i=1\cdots 4$ であった。以下この記法は断りなく用いる。)

とおくと、$\bigcup_{\xi\in Ⓗ} W'_\xi$ は $\{(y_1\cdots y_4)\in\mathbb{R}^4 \mid y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2=0\}$
なる円錐に外接する多角錐(ただし点対称でなくて y_1-軸の原点での折り返しで対称なもの)の外側についての Tube domain となる。以下これを $D_{Ⓗ}$ と書く。

Lemma 2.2.2 $\mathcal{F}^{-1}f_\Delta$ は $W'_{\xi^{(1)}}\cap W'_{\xi^{(2)}}\cap W'_{\xi^{(3)}}$ の上で正則である。
ただし Δ は Ⓗ の3角形で $\xi^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ は Δ の頂点とする。

証明 Lemma 2.2.1 より $\mathcal{F}^{-1}f_\Delta$ は

$$\{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid y_1v_1+\cdots+y_4v_4>0 \text{ for all } (v_1\cdots v_4)\in S_\Delta\}$$

$$=\bigcap_{i=1,2,3}\left\{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l}\varepsilon t y_1+tk y_2\xi_2^{(i)}+tk y_3\xi_3^{(i)}+tk y_4\xi_4^{(i)}>0\\ \text{for all } k\geq 1,\ t>0,\ \varepsilon=\pm 1\end{array}\right\}$$

$$=\bigcap_{i=1,2,3}\{(z_1\cdots z_4)\in\mathbb{C}^4 \mid y_2\xi_2^{(i)}+y_3\xi_3^{(i)}+\xi_4\xi_4^{(i)}>|y_1|\}$$

$$=\bigcap_{i=1,2,3} W'_{\xi^{(i)}}$$ で正則 ⊣

ここで ξ を Ⓗ の任意の頂点としたとき．

$$St(\xi) = (\bigcup\{\xi \text{ を頂点にもつ Ⓗ の3角形の閉包}\}) \text{の開核}$$

とおいたとき．

$$W_\xi = \left\{ (z_1 \cdots z_4) \in W'_\xi \;\middle|\; \begin{array}{l}(y_2, y_3, y_4)\text{の単位球への projection} \\ \text{が } St(\xi) \text{ に属する。}\end{array} \right\}$$

とおく。W_ξ は凸集合になることが容易にわかるから．Stein である。
また次が Ⓗ の3角形がすべて鋭角3角形であることからわかる。

<u>Lemma 2-2-3</u> $\quad D_{Ⓗ} = \bigcup_{\xi \in Ⓗ} W_\xi$

$\mathcal{O}$ を正則関数の芽の層とする。$\Delta \in$ Ⓗ とし $\xi_\Delta^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ を

その頂点とする。

$f \in L^2(V)$ に対して．$\mathcal{F}^{-1} f_\Delta \in \mathcal{O}(W_{\xi_\Delta^{(1)}} \cap W_{\xi_\Delta^{(2)}} \cap W_{\xi_\Delta^{(3)}})$ より．

$$\varphi_{Ⓗ}(f) = \sum_{\Delta \in Ⓗ} \mathcal{F}^{-1} f_\Delta \; W_{\xi_\Delta^{(1)}} \wedge W_{\xi_\Delta^{(2)}} \wedge W_{\xi_\Delta^{(3)}}$$

(ただし $\det \begin{pmatrix} \xi_\Delta^{(1)} \\ \xi_\Delta^{(2)} \\ \xi_\Delta^{(3)} \end{pmatrix} > 0$ となるようとっておく)

とおく。

ただし．ここで Čech Cohomology の chain を外微分形式の記法で書いた。(c.f. [Ka] 第5章 §5 または [Pa])

ここで．$\{W_\xi\}$ なる $D_{Ⓗ}$ の被覆は Stein 被覆で．しかもその4つの共通部分はすべて空集合となるようにとってあるから．$\varphi_{Ⓗ}(f)$ は cocycle となり

$$\varphi_{Ⓗ} : L^2(V) \longrightarrow H^2(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}_{D_{Ⓗ}})$$

が定義される。

2.3

次に $\Gamma^+_{\Theta} = \{(z_1 \cdots z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid (z_1 \cdots z_4) \notin D_{\Theta}$ かつ $y_1 \geq 0\}$

$\Gamma^-_{\Theta} = \{(z_1 \cdots z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid (z_1 \cdots z_4) \notin D_{\Theta}$ かつ $y_1 \leq 0\}$

なる$\mathbb{C}^4$の閉集合を考える。

ここで $(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+_{\Theta}) \cup (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-_{\Theta}) = \mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4$

$(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+_{\Theta}) \cap (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-_{\Theta}) = D_{\Theta}$

に注意すると次のような Mayer-Vietris 完全系列が得られる。

$$(2\tfrac{1}{2}) \cdots \leftarrow H^{q+1}(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta_{\Theta}} H^q(D_{\Theta}, \mathcal{O}) \leftarrow H^q(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+_{\Theta}, \mathcal{O}) \oplus H^q(\mathbb{C}^4 - \Gamma^-_{\Theta}, \mathcal{O})$$

$$\leftarrow \cdots$$

ここで $H^q(\mathbb{C}^4 - \Gamma^{\pm}_{\Theta}, \mathcal{O}) = H^{q+1}_{\Gamma^{\pm}_{\Theta}}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \quad q \geq 1$

$H^q(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) = H^{q+1}_{\mathbb{R}^4}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \quad q \geq 1$

が $\mathbb{C}^4$ が Stein なことからいえる。

さらによく知られた結果より（たとえば [K-I] Théorème 1·1·2）

$$H^q_{\Gamma^{\pm}_{\Theta}}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{for } q \neq 4.$$

また hyperfunction の基本的な結果として

$$H^q_{\mathbb{R}^4}(\mathbb{C}^4) = \begin{cases} B(\mathbb{R}^4) & q = 4 \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

となる。（$B(\mathbb{R}^4)$は $\mathbb{R}^4$ 上の hyperfunction 全体）

よって今まで述べたことから直ちに次をうる。

Lemma 2.3.1

$$H^q(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}) = 0 \qquad q \neq 2, 0$$

また

$$0 \leftarrow H^4_{\Gamma^+_{Ⓗ}}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \oplus H^4_{\Gamma^-_{Ⓗ}}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \leftarrow B(\mathbb{R}^4) \xleftarrow{\delta_{Ⓗ}} H^2(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}) \leftarrow 0$$

は完全系列になる。

証明 $H^3(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}) = 0$ については $\{W_\xi\}$ なる Stein covering の 4つの intersection が空なことより明らか。┤

☆ ここで $\mathcal{U}^0 = \{W_\xi\}$ とおき、$Z^2(\mathcal{U}^0, \mathcal{O})$ を $\mathcal{U}^0$ なる Stein covering についての層 $\mathcal{O}$ についての cocycle の空間とする。すると、

$$Z^2(\mathcal{U}^0, \mathcal{O}) \xrightarrow{b} B(\mathbb{R}^4)$$

なる boundary value をとる map が定まる。

($\{W_\xi\}$ の3つの元の intersection は proper convex open cone だから)

一方 p を $H^2(D_{Ⓗ}, \mathcal{O})$ への自然な projection とすると、

(3)
$$\begin{array}{ccc} Z^2(\mathcal{U}^0, \mathcal{O}) & \xrightarrow{b} & B(\mathbb{R}^4) \\ \downarrow p & & \| \\ H^2(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\delta_{Ⓗ}} & H^3(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) \end{array}$$

なる図式が得られる。すると具体的に Covering をつくって計算すると、次の Lemma が得られる。

Lemma 2.3.2　図式(3)は可換である。

次に H' を H の細分とするとき $D_{H'} \supseteq D_H$ は明らかより

(4)
$$\begin{tikzcd} & H^2(D_H, \mathcal{O}) \arrow[d, "\text{restriction}"] \\ L^2(V) \arrow[ur, "\varphi_H"] \arrow[dr, "\varphi_{H'}"'] & \\ & H^2(D_{H'}, \mathcal{O}) \end{tikzcd}$$

なる図式が得られる。

Lemma 2.3.3　図式(4)は可換である。

証明
$$\begin{tikzcd} & H^2(D_H, \mathcal{O}) \arrow[d, "\text{restriction}"] \arrow[dr, "\delta_H"] & \\ L^2(V) \arrow[ur, "\varphi_H"] \arrow[dr, "\varphi_{H'}"'] & & B(\mathbb{R}^4) \\ & H^2(D_{H'}, \mathcal{O}) \arrow[ur, "\delta_{H'}"'] & \end{tikzcd}$$

と書くと. Mayer-Vietoris完全系列のFunctorialityより右の3角形は可換. また $\delta_H \circ \varphi_H = \delta_{H'} \circ \varphi_{H'} = \mathcal{F}^{-1}$ がLemma 2.3.2よりいえ. さらに $\delta_{H'}$ は1-1であるからLemmaが従う。⊣

Lemma 2.3.3により H についての inverse limit への map
$$\varprojlim_{H} H^2(D_H, \mathcal{O}) \xleftarrow{\varphi'} L^2(V)$$
が定まる。一方 $D = \bigcup_H D_H$ より

$$\varprojlim_{\Theta} H^2(D_{\Theta}, \mathcal{O}) \xleftarrow{g} H^2(D, \mathcal{O})$$

なるcanonicalなmap g が存在する。ここで次のLemmaを引用する。(同様なことは．[K] 4・2にのっている)

Lemma 2・3・4 ([K-I] Lemme 1・1・6)

Xを位相空間，$\mathcal{F}$をその上のsheafとする。U_nをXのopen setの増加列で$\bigcup_n U_n = X$となるものとする。このときcanonicalなmap

$$H^{k-1}(U_{n+1}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{k-1}(U_n, \mathcal{F})$$

がつねにsurjectiveなら

$$\varprojlim_n H^k(U_n, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^k(X, \mathcal{F})$$

canonicalなmapで．

ここでは．$H^1(D_{\Theta}, \mathcal{O}) = 0$ がLemma 2・3・1よりいえたから，Lemma 2・3・4がつかえて g が実は同型であることがわかる。よってmap

$$\varphi : L^2(V) \longrightarrow H^2(D, \mathcal{O})$$

が定義できた。$\Gamma^{\pm}$を$\Gamma_0^{\pm}$の$\mathbb{C}^4$における閉包とする。

ここで

$$(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+) \cup (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-) = \mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4$$
$$(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+) \cap (\mathbb{C}^4 - \Gamma^-) = D$$

より

$$(5) \quad \leftarrow \underset{\underset{\mathcal{B}(\mathbb{R}^4)}{\parallel}}{H^3(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O})} \xleftarrow{\delta} H^2(D, \mathcal{O}) \leftarrow H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma^+, \mathcal{O}) \oplus H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma^-, \mathcal{O})$$

$$\leftarrow \cdots$$

なる Mayer-Vietris 完全系列を得る。前と同様の議論で、

$$H^q(\mathbb{C}^4 - \Gamma^{\pm}, \mathcal{O}) = 0 \qquad q \neq 0, 3$$

がいえるので、δ は 1-1 となる。

ここで Mayer-Vietris 完全系列 $(2\frac{1}{2})$ の Ⓗ についての inverse limit を考えると、再び Lemma 2.3.4 より

$$\begin{tikzcd} B(\mathbb{R}^4) \arrow[d, equal] & \varprojlim H^2(D_{Ⓗ}, \mathcal{O}) \arrow[l, "\varprojlim \delta_{Ⓗ}"'] \arrow[d, "\wr"', "\mathcal{S}_q"] & L^2(V) \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ B(\mathbb{R}^4) & H^2(D, \mathcal{O}) \arrow[l, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

は可換になる。よって $\mathcal{F}^{-1} = \delta \circ \varphi$ となる。

また Mayer-Vietris 完全系列 (5) は P-action が well-defined に定まりこれについて各 map が equivariant さらに $U(\mathfrak{g})$ は正則な微分作用素として act するから、次がいえる。($U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra)

<u>Theorem 2.3.5</u>

$$L^2(V) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} L^2(H(2))$$

なる逆 Fourier 変換は、

$$\begin{tikzcd} L^2(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, "\mathcal{F}^{-1}"'] & H^2(D, \mathcal{O}) \arrow[r, "\delta"] & B(H(2)) \\ & & L^2(H(2)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

と Factor される。δ は Mayer-Vietris 完全系列 (5) より与えられる。

また、これらの map はみな P-equivariant かつ $U(\mathfrak{g})$-hom. となり δ は単射である。

§3 G/H 上の line bundle の cohomology への表現の実現

3.1

[Kos] Theorem 6.4 の generalized Borel-Weil-Bott の Theorem を用いると．次がわかる。

Lemma 3.1.1 $L_{\rho'}$ を 1.2 で定められた $F_{\mathbb{C}}$ 上の line bundle とすると．

$$H^q(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) = 0 \quad \text{for all } q = 0, 1, 2 \cdots$$

3.2 ここで $\overline{\Gamma}^{\pm}$ を $\Gamma_0^{\pm}$ の $F_{\mathbb{C}}$ における閉包とする。

$$(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{+}) \cup (F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{-}) = F_{\mathbb{C}} - F$$

$$(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{+}) \cap (F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{-}) = \tilde{D}$$

に注意すると．次のような Mayer-Vietris 完全系列を得る。

$$(6) \leftarrow H^q(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{+}, L_{\rho'}) \oplus H^q(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{-}, L_{\rho'}) \leftarrow H^q(F_{\mathbb{C}} - F, L_{\rho'})$$
$$\xleftarrow{\tilde{\delta}} H^{q-1}(\tilde{D}, L_{\rho'}) \leftarrow H^{q-1}(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{+}, L_{\rho'}) \oplus H^{q-1}(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{-}, L_{\rho'}) \leftarrow$$

ここで Lemma 3.1.1 により

$$H^q(F_{\mathbb{C}} - \overline{\Gamma}^{\pm}, L_{\rho'}) = H^{q+1}_{\overline{\Gamma}^{\pm}}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'})$$

$$H^q(F_{\mathbb{C}} - F, L_{\rho'}) = H^{q+1}_{F}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'})$$

となる。一方 $\Gamma^{\pm}$ の有界対称領域としての実現を考えると．$\mathbb{C}^4$ の有界凸集合となるから (c.f [W] 3. Harish-Chandra Realization) その閉包に台をもつ cohomology はよく知られた結果により (たとえば [Ka] 定理 6.5.5 など)

$$H^{q+1}_{\Gamma^{\pm}}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) = 0 \quad q \neq 3$$

となる。一方 $F_{\mathbb{C}}$ は F の複素近傍より F は $F_{\mathbb{C}}$ において純4次元的（$\dim F = 4$ より）よって

$$H^{q+1}_{F}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) = 0 \quad q \neq 3$$

となりさらに $H^4_F(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'})$ は $L_{\rho'}$ の hyperfunction section 全体の集合. $B(F, L_{\rho'})$ のこととなる。

よって $\quad H^q(\tilde{D}, L_{\rho'}) = 0 \quad (q \neq 2, 3)$

および

$$0 \leftarrow H^3(\tilde{D}, L_{\rho'}) \leftarrow H^4_{\Gamma^+}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \oplus H^4_{\Gamma^-}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'})$$
$$\leftarrow B(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \xleftarrow{\tilde{\delta}} H^2(\tilde{D}, L_{\rho'}) \leftarrow 0$$

なる完全系列を得る。ここで上の完全系列における各写像は G-equivariant となる。ここで $\overline{N_{\mathbb{C}}} \cdot e_0 = U_0$ $\;F_{\mathbb{C}} - U_0 = S$ とおくと.

$$H^3_{\Gamma^{\pm} \cap U_0}(U_0, L_{\rho'}) \xrightarrow{\delta} H^4_{\Gamma^{\pm} \cap S}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho}) \to H^4_{\Gamma^{\pm}}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \to H^4_{\Gamma^{\pm} \cap U_0}(U_0, L_{\rho'})$$

なる完全系列があるが. $\Gamma^{\pm} \cap U_0$ は, $\Gamma^{\pm}_0$ の U_0 での閉包 $\Gamma^{\pm}$ に他ならない。よってそこでは $L_{\rho'}|U_0 = \mathcal{O}_{U_0}$ と思えるから.

$$H^q_{\Gamma^{\pm}}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) = 0 \quad (q \neq 4)$$

であったから. 結局次の各行各列が完全な図式で. 可換となるものを得る。

$$(7)\qquad \begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
H^4_{\Gamma^+\cap S}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \oplus H^4_{\Gamma^-\cap S}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \arrow[d, "p"] & & & \\
H^4_{\Gamma^+}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \oplus H^4_{\Gamma^-}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'}) \arrow[d, "r'"] & B(F, L_{\rho'}) \arrow[l, "\tilde{\iota}^*"'] \arrow[d, "r"] & H^2(\tilde{D}, L_{\rho'}) \arrow[l, "\tilde{\delta}"'] \arrow[d, "r''"] & 0 \arrow[l] \\
H^4_{\Gamma^+}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) \oplus H^4_{\Gamma^-}(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}) & B(H(2)) \arrow[l, "\delta^*"'] \arrow[d] & H^2(D, \mathcal{O}) \arrow[l, "\delta"'] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}^4 = V_0$

ここで第3列の完全系列は(5)より得られる。

ここで $K = \left\{ g = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right) \;\middle|\; (A+iB, A-iB) \in S(U(2)\times U(2)) \right\}$

とおくと、これはGのmaximal compact subgroupでありその Lie algebraを $\mathfrak{k}$ とおく。

ここで(7)に出てくるすべてのcohomologyの空間上には $U(\mathfrak{g})$ および $U(\mathfrak{k})$ がactしている。

<u>Lemma 3.2.1</u> $H^4_{\Gamma^{\pm}\cap S}(F_{\mathbb{C}}, L_{\rho'})$ の $\mathfrak{k}$-finite element は0だけである。

証明は、Sを(generalized) Schubert cellに分割し、$\Gamma^{\pm}\cap S$ のそれから得られるstratificationを詳しく考察することにより、最後はCauchy-Kowalevskyの定理を使う手法を用いて行なう。

このLemmaを使うと次がいえる。

<u>Lemma 3.2.2</u> $B(F, L_{\rho'})$ の $\mathcal{K}$-finite element f で $r(f)$ が $H^2(D, \mathcal{O})$ にもち上がるものは $H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})$ にもち上がる。

証明 $r' i^*(f) = j^* r(f) = 0$ より. $i^*(f)$ は.
$H^4_{\Gamma^+\cap S}(F_C, L_{\rho'}) \oplus H^4_{\Gamma^-\cap S}(F_C, L_{\rho'})$ のある元 g から $p(g) = i^*(f)$ ときている。一方 p は 1-1 より g は $\mathcal{K}$-finite よって $g=0$
よって $i^*(f)=0$ これより f は $H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})$ にもち上がる。⊣

$H^2(\tilde{D}, L_{\rho'}) \ni f$ に対して $r\tilde{\delta}(f)$ の L^2 内積をとる. ということによって内積を入れ. これに対応するノルムが有限なもの全体を $H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})_{L^2}$ とかくことにする。
また $H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})$ の元で $\mathcal{K}$-(よって K-) finite な元全体を $H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})_{\mathcal{K}}$ とおく。
すると $\tilde{\delta}$ をとった後で考えれば. $B(F, L_{\rho'})$ の中では $\mathcal{K}$-finite なら L^2 は明らかより.

$$H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})_{\mathcal{K}} \subseteq H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})_{L^2}$$

がいえる。 また Lemma 3.2.2 より.

$$H^2(\tilde{D}, L_{\rho'})_{\mathcal{K}} \xrightarrow[r]{\sim} \{H^2(D, \mathcal{O}) \text{ の } \mathcal{K}\text{-finite element}\}$$

よって次の主要結果を得る。

Theorem 3·2·3

(1) $H^2(\hat{D}, L_\rho)_K$ は $L^2(V)$ の K-finite vector に対応する元をすべて含む

(2) $H^2(\hat{D}, L_\rho)_K \subseteq H^2(\hat{D}, L_\rho)_{L^2}$ よって $H^2(\hat{D}, L_\rho)_{L^2}$ は non-trivial

Remark [R-S-W] 4·28 の一般的な結果より実は $H^2(\hat{D}, L_\rho)_K$ の K-既約表現への分解は完全にわかる。よって(1)と合わせると、$H^2(\hat{D}, L_\rho)_K$ は $L^2(V)$ の K-finite vector に対応する元だけを丁度含んでいることもわかる。

(SU(2,2)の表現はいろいろと分類されているようなので、そのようなことと合わせれば [R-S-W]の結果だけから、上の(1)も出てくるかもしれない。) また、$H^2(\hat{D}, L_\rho)_{L^2}$ はかなり広い空間で、実は $\iota\hat{S}(H^2(\hat{D}, L_\rho)_{L^2})$ の $L^2(H(2)^*)$ における (Hilbert spaceの位相の意味での) 閉包は $L^2(H(2))$ 全体に一致する。また $P(L^2(V)) \subseteq \iota\hat{S}(H^2(\hat{D}, L_\rho)_{L^2})$ である。

☆ なお7月に開かれた短期共同研究会のとき話した内容 ($G = SU(2,2)$ でなく $G = Mp(2,\mathbb{R})$ としたこと) には誤りがあったのでこの場を借りてお詫びをさせて頂きます。

References

[K-V] M. Kashiwara, M. Vergne: Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 728 (1979) 136-176

[K-L] M. Kashiwara, Y. Laurent: Theoremes d'annulation et deuxieme microlocalisation Univerité de Paris-Sud (1983)

[K] M. Kashiwara "Systems of Microdifferential Equations" Birkhäuser (1983)

[Ka] 金子晃 "超函数入門 下" 東京大学出版会 (1982)

[Kos] B. Kostant : Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem Ann. of Math. 74 (1961) 329-387

[W] J. Wolf : Fine structure of hermitian symmetric spaces in : Symmetric Space, Bothby and Weiss (eds.), New York : M. Dekker (1972)

[Pa] V.P. Palamodov : 定数係数線型微分作用素 上, 下 吉岡書店 1973

[Gr] K.I. Gross : The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of Sp(n. ℂ) Amer. J. Math. 93 (1971), 398-428

[Vo] D.A. Vogan Jr. : "Representations of Real Reductive Lie group" Birkhäuser 1981

[Vo-Z] D.A. Vogan Jr., G.J. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology, Compo. Math. 53 (1984) 51-90

[R-S-W] J. Rawnsley, W. Schmid, and J. Wolf : Singular unitary representations and indefinite harmonic theory J. Funct. Anal. 51 (1983) 1-114

[J-V] H.P. Jakobsen, M. Vergne : Wave and Dirac Operators, and Representations of the Conformal Group J. Funct. Anal 24 (1977) 52-106